

Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
LICENCE 2 MIAHS

Espaces euclidiens

Contrôle continu, le 3 décembre 2024, 13h30–14h00

CORRIGE et BAREME

Exercice 1. On pose

$$w_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

On a $\langle w_1, w_1 \rangle = 7^2 + 4^2 + (-4)^2 = 81 = 9^2$. Du coup, $\|w_1\| = \sqrt{9^2} = 9$, et on pose

$$w'_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}. \quad (1 \text{ pt})$$

Ensuite, on pose

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1. \quad (2 \text{ pt})$$

Calculons d'abord le coefficient devant w_1 :

$$\frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} = \frac{-3 \times 7 - 3 \times 4 + 12 \times (-4)}{9^2} = \frac{-81}{9^2} = -1. \quad (1 \text{ pt})$$

On a donc

$$w_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

On a $\langle w_2, w_2 \rangle = 4^2 + 1^2 + 8^2 = 81 = 9^2$. Du coup, $\|w_2\| = \sqrt{9^2} = 9$, et on pose

$$w'_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}. \quad (1 \text{ pt})$$

Puis, on pose

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2. \quad (2 \text{ pt})$$

Calculons le coefficient devant w_1 :

$$\frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} = \frac{1 \times 7 - 11 \times 4 + 11 \times (-4)}{9^2} = \frac{-81}{9^2} = -1, \quad (\mathbf{1 \text{ pt}})$$

et celui devant w_2 :

$$\frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} = \frac{1 \times 4 - 11 \times 1 + 11 \times 8}{9^2} = \frac{81}{9^2} = 1. \quad (\mathbf{1 \text{ pt}})$$

On a donc

$$w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -11 \\ 11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On a $\langle w_3, w_3 \rangle = 4^2 + (-8)^2 + 1^2 = 81 = 9^2$. Du coup, $\|w_3\| = \sqrt{9^2} = 9$, et on pose

$$w'_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (\mathbf{1 \text{ pt}})$$

La base orthonormée demandée est donc w'_1, w'_2, w'_3 , c-à-d,

$$\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}, \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}, \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix}.$$